Pondichéry 2006	EXERCICE II. ANALOGIES ELECTROMECANIQUES (5 points)

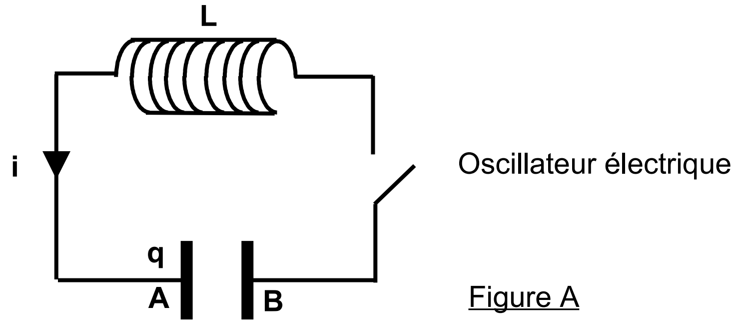

Figure A

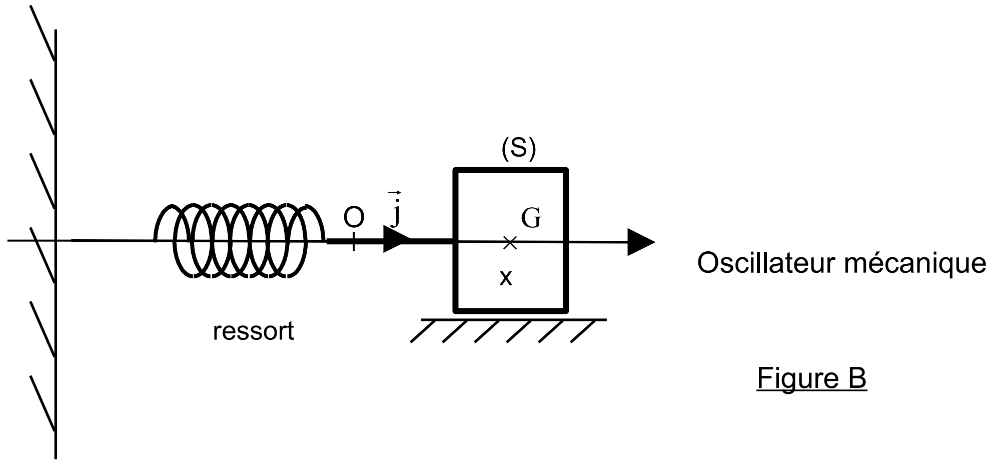

Figure B

On considère les deux oscillateurs idéaux suivants (voir figures A et B ci-dessus) :

•un *circuit électrique* comprenant :

- une bobine d'inductance L et de résistance négligeable
- un condensateur de capacité C et d'armatures A et B
- un interrupteur.

Les conventions d'orientation sont telles que l'intensité du courant est $i = \frac{dq}{dt}$, q(t) étant la charge instantanée du condensateur, c'est-à-dire celle de l'armature A.

Les conditions initiales du fonctionnement sont les suivantes: à t négatif ou nul, l'interrupteur est ouvert et le condensateur porte la charge $q(0) = Q_o$; à t = 0, on ferme l'interrupteur.

On donne L= 0,10 H ; C = 10,0 μF et $Q_o = 10^{-4}$ C.

•un *système {solide - ressort} horizontal* comprenant :

- un solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, glissant sans frottement dans la direction de l'axe $O\vec{j}$ horizontal et d'origine O (voir Figure B) : si (S) est au repos, G est en O ; à un instant quelconque, G est repéré par son abscisse x
- un ressort à spires non jointives de raideur k, de masse négligeable, dont l'une des extrémités est attachée à (S) et l'autre fixée rigidement à un support.

Les conditions initiales choisies sont les suivantes: à l'instant $t = 0$, la position du centre d'inertie du solide vaut X_o et sa vitesse v_x est nulle.

On donne le rapport $\frac{m}{k} = 1{,}0.10^{-2}$ S.I. et $X_o = + 4{,}0$ cm.

1 Oscillateur mécanique

On admet que l'équation différentielle vérifiée par x(t) est $m\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$ où $\frac{d^2x}{dt^2}$ désigne la dérivée seconde par rapport au temps de la fonction x(t).

1.a - Faire le bilan des forces agissant sur (S). Les représenter sur un schéma.

1.b - Retrouver l'équation différentielle du mouvement en précisant la loi physique utilisée.

1.c - Quelles que soient les valeurs de A et φ, vérifier que $x = A.\cos(2\pi\frac{t}{T} + \varphi)$ est solution de l'équation différentielle précédente si T a une valeur fonction de k et m dont on donnera l'expression.

Quelle est l'unité du rapport $\frac{m}{k}$?

Comment appelle-t-on T ? Quelle est sa valeur numérique ?

1.d - En prenant en compte les conditions initiales du début de l'énoncé, montrer que $A = X_o$ et $\varphi = 0$.

2 Oscillateur électrique

On admet que l'équation différentielle vérifiée par la charge q(t) est: $L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$

On utilise de façon systématique la comparaison entre les deux équations différentielles.

2.a - Quelle est la grandeur mécanique correspondant à l'intensité instantanée du courant i(t) ?
Quelles sont les grandeurs électriques correspondant respectivement à la raideur du ressort et à la masse du solide (S) ?

2.b - En utilisant les similitudes entre les équations différentielles et les conditions initiales, montrer que la charge instantanée du condensateur est $q(t) = Q_o.\cos(2\pi\frac{t}{T'})$.

Donner l'expression de T' en fonction des caractéristiques des composants du circuit. Calculer numériquement T'.

3.- Représenter sur deux schémas différents les fonctions x(t) et q(t). Le dessin fait pour t variant de 0 à 2T (ou 2T') peut être approximatif mais on aura soin de bien préciser les points importants: situation à l'origine des temps, extréma, passage par la valeur nulle.

4 - Les oscillateurs réels ne sont pas idéaux. Pourquoi ? Quels sont les phénomènes physiques responsables ?